

**Федеральное государственное автономное образовательное  
учреждение высшего образования  
«Московский физико-технический институт  
(национальный исследовательский университет)»**

**УТВЕРЖДЕНО**

**Директор института нано-, био-,  
информационных, когнитивных  
и социогуманитарных наук и  
технологий**

**П.А. Форш**

**Рабочая программа дисциплины (модуля)**

<b>по дисциплине:</b>	Теория вероятностей
<b>по направлению:</b>	Прикладные математика и физика
<b>профиль подготовки:</b>	Физика атомных ядер и элементарных частиц, физика высоких энергий Физтех-школа природоподобных, плазменных и ядерных технологий им. И.В. Курчатова Кафедра математики и математических методов физики
<b>курс:</b>	4
<b>квалификация:</b>	бакалавр

Семестр, формы промежуточной аттестации: 7 (осенний) - Экзамен

Аудиторных часов: 45 всего, в том числе:

лекции: 30 час.

семинары: 15 час.

лабораторные занятия: 0 час.

Самостоятельная работа: 60 час.

Подготовка к экзамену: 30 час.

Всего часов: 135, всего зач. ед.: 3

Количество контрольных работ, заданий: 2

Программу составил: А.М. Чеботарев, д-р физ.-мат. наук, профессор, профессор

Программа обсуждена на заседании Кафедры математики и математических методов физики 20.03.2020

## Аннотация

Целями изучения данной дисциплины является формирование навыков «вероятностного мышления», вероятностного подхода к постановке и решению задач.

В курсе излагаются основные положения и методы теории вероятностей, которые используются при анализе случайных явлений. В частности, законы больших чисел объясняют, почему вероятность события проявляется через частоту его появления в серии независимых испытаний, а центральная предельная теорема объясняет популярность нормального распределения в различных приложениях.

Дается определение дискретного вероятностного пространства, подробное описание связанных с ним понятий и результатов (условная вероятность, независимость, формула полной вероятности, формула Байеса).

Вводится понятие случайной величины на дискретном вероятностном пространстве, определяются ее основные характеристики. Доказывается неравенство Чебышева. Для двух случайных величин рассматривается понятие совместного распределения, определяются ковариация и коэффициент корреляции, обсуждается их физический смысл. Дается доказательство закона больших чисел в форме Чебышева.

Кратко рассматривается аксиоматическое построение вероятностного пространства (по Колмогорову), даются определения случайной величины (как измеримой функции относительно сигма-алгебры событий) и ее математического ожидания (как интеграла Лебега).

Вводятся понятия функции распределения и плотности вероятности случайной величины. Обсуждаются их свойства. Для двух случайных величин определяются функция совместного распределения и совместная плотность, обсуждается их связь с «одномерными» характеристиками. Рассматриваются вопросы о вычислении математического ожидания любой функции от заданной случайной величины, а также функции от пары случайных величин, имеющих заданную совместную плотность. Обсуждается проблема пересчета плотностей при функциональных преобразованиях.

Вводятся понятие характеристической функции случайной величины. Обсуждаются основные свойства характеристических функций и решаемые с помощью этих функций задачи. Доказываются закон больших чисел (в форме Хинчина) и центральная предельная теорема (в простейшей формулировке).

## 1. Цели и задачи

### Цель дисциплины

- изучение методов теории вероятностей и математической статистики и их применений для обработки экспериментальных данных и статистического моделирования.

### Задачи дисциплины

- знакомство с аксиоматикой Колмогорова и основными понятиями теории вероятностей: события совместные и несовместные, зависимые и независимые, сходимости по распределению, по вероятности, почти наверное, доверительные вероятности и интервалы, статистические ошибки первого и второго рода, функции правдоподобия и информация Фишера, свойства марковости и эргодичности;
- изучение свойств основных распределений, используемых в теории вероятностей и математической статистике, их характеристических функций (теорема Бохнера-Хинчина) и моментов (теорема Бернштейна), предельных теорем для случайных выборок и экстремальных событий, параметрических и непараметрических методов проверки статистических гипотез, определения параметров распределений и обработки экспериментальных данных, включая метод Колмогорова—Смирнова и метод наибольшего правдоподобия, изучение критериев эргодичности для цепей Маркова;
- практическое изучение способов получения и преобразования случайных величин, цепей Маркова, моделирования скачкообразных и диффузионных случайных процессов на ПК.

## 2. Перечень формируемых компетенций

Освоение дисциплины направлено на формирование следующих компетенций:

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
ОПК-1 Способен применять	ОПК-1.1 Способен анализировать поставленную задачу, намечать пути ее решения

фундаментальные знания, полученные в области физико-математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности

ОПК-1.2 Способен строить математические модели, производить количественные расчеты и оценки

ОПК-1.3 Способен определять границы применимости полученных результатов

### 3. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю)

В результате освоения дисциплины обучающиеся должны

знать:

- классическое определение вероятности, понятие вероятностного пространства (аксиоматика Колмогорова), понятие независимых событий; определение условной вероятности; формулу полной вероятности, формулу Байеса, схему независимых испытаний Бернулли; понятия случайной величины;
- функции распределения и плотности распределения; понятия дискретной и абсолютно непрерывной случайных величин; определение среднего значения и дисперсии; определения многомерной случайной величины; независимой случайной величины; коэффициента корреляции; нормальное распределение и распределение Пуассона;
- предельные теоремы Муавра-Лапласа и Пуассона; закон больших чисел; центральную предельную теорему; определения характеристической и производящей функций, их свойства; основные понятия математической статистики, метод максимума правдоподобия, доверительные интервалы; методы проверки статистических гипотез;
- цепи Маркова, их статистический и физический смысл, марковские процессы, конечные однородные цепи Маркова, предельное и стационарное распределения, эргодичность; определение стохастического процесса, задание стохастических процессов с помощью конечномерных распределений, стохастическую эквивалентность.

уметь:

- применять свойства вероятности;
- вычислять числовые характеристики основных законов распределения;
- находить распределение функций от случайных величин с заданными распределениями;
- находить характеристические и производящие функции;
- выявлять предельное распределение для последовательности случайных величин;
- строить и исследовать модели простых случайных экспериментов;
- вычислять числовые характеристики основных законов распределения;
- применять статистические таблицы.

владеть:

- аппаратом теории вероятностей; основными одномерными распределениями (равномерное дискретное, Бернулли, биномиальное, отрицательное биномиальное, гипергеометрическое, геометрическое, Пуассона, Парето, равномерное, показательное, нормальное);
- навыками установления взаимосвязей между различными теоретическими понятиями и результатами случайных экспериментов (соотношениями разных видов сходимости); методами точечных и интервальных оценок параметров распределения.

### 4. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

#### 4.1. Разделы дисциплины (модуля) и трудоемкости по видам учебных занятий

№	Тема (раздел) дисциплины	Трудоемкость по видам учебных занятий, включая самостоятельную работу, час.			
		Лекции	Семинары	Лаборат. работы	Самост. работа
1	Вероятностные пространства и основные распределения.	2	1		5
2	Критерий Колмогорова.	2	1		5
3	Критерий Пирсона.	2	1		5
4	Линейный метод наименьших квадратов.	2	2		5

5	Марковские цепи и случайные блуждания.	2	1		5
6	Метод максимального правдоподобия.	4	2		5
7	Метод Монте-Карло и алгоритм Метрополиса.	2	1		5
8	Проблема моментов и теорема Бернштейна.	2	1		5
9	Скачкообразные и диффузионные процессы.	2	1		5
10	Статистическая обработка экспериментальных данных.	2	1		5
11	Сходимость случайных величин и предельные теоремы.	4	1		5
12	Теорема Бохнера–Хинчина и центральная предельная теорема.	4	2		5
Итого часов		30	15		60
Подготовка к экзамену		30 час.			
Общая трудоёмкость		135 час., 3 зач.ед.			

#### 4.2. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам)

Семестр: 7 (Осенний)

##### 1. Вероятностные пространства и основные распределения.

1. Вероятностное пространство. Несовместные и независимые события. Условная вероятность. Формула Байеса.
2. Случайные величины, их средние значения, дисперсии и моменты высших порядков. Распределение сумм и произведений независимых случайных величин. Примеры для финитных д.с.в. Распределение функции от случайной величины.
3. Характеристические и производящие функции случайных величин. Х.ф. суммы независимых случайных величин. Положительная определенность и равномерная непрерывность. Примеры х.ф. для основных распределений. Моменты и коммулянты, их связь с х.ф.
4. Корреляционные и ковариационные функции. Рекуррентные соотношения. Параметризация многомерных нормальных распределений и их характеристических функций с помощью ковариационных матриц.
5. Датчики псевдослучайных чисел в системе Математика для основных распределений: биномиальное, пуассоновское и нормальное распределение, гамма-распределение. Опции графического вывода. Интерактивные функции.

##### 2. Критерий Колмогорова.

1. Ранговые и кумулятивные распределения. Теорема Гливленко--Кантелли.
2. С-критерий Колмогорова для оценки параметров выборочных кумулятивных распределений. Теорема Смирнова.
3. Формулы Крамера--фон Мизеса и Андерсона--Дарлингса. Оценки показателей полиномиально убывающих хвостов.
4. Простые и сложные статистические гипотезы. Понятие мощности статистических критериев.

##### 3. Критерий Пирсона.

1. Метод Пирсона для проверки гипотезы о законе распределения с помощью критерия хи-квадрат. Оценка числа степеней свободы.

2. Применение критерия хи-квадрат для проверки гипотезы об однородности с помощью критерия Пирсона
3. Применение критерия хи-квадрат для проверки гипотезы о независимости с помощью критерия Пирсона
4. Оценка статистической достоверности закона Хаббла, контроль качества датчиков псевдослучайных чисел и проверка независимости признаков.

#### 4. Линейный метод наименьших квадратов.

1. Алгебраическое и геометрическое содержание метода наименьших квадратов
2. Оценка и статистический анализ остаточной суммы квадратов. Коэффициент детерминации Пирсона
3. Оценки доверительных интервалов для коэффициентов линейной регрессии с помощью распределений Стьюдента.
4. Сеточные ортонормированные полиномы. Метод Форсайта для оценки порядка регрессии с помощью распределений Фишера. Процедура Regress в системе. Математика для оценки порядка регрессии. Численные примеры аппроксимации экспериментальных данных

#### 5. Марковские цепи и случайные блуждания.

1. Марковские цепи
2. Случайное блуждание и его свойства, закон арксинуса
3. Классификация состояний цепей Маркова. Неприводимые марковские цепи
4. Теорема Перрона–Фробениуса для неприводимых цепей. Возвратные, невозвратные и апериодические состояния марковских цепей.

#### 6. Метод максимального правдоподобия.

1. Идентификация параметров методом наибольшего правдоподобия.
2. Информация Фишера и неравенство Рао–Крамера.
3. Примеры эффективных статистик. Реализации метода наибольшего правдоподобия для оценок параметров распределений (нормального, Гамма-распределения, Коши, Пуассона, Бернулли, Парето). Примеры оптимальных статистик
4. Примеры применения метода наибольшего правдоподобия в физике по материалам научных публикаций

#### 7. Метод Монте-Карло и алгоритм Метрополиса.

1. Методы отбора и преобразования случайных величин. Метод фон Неймана. Метод Монте-Карло.
2. Стохастическое представление решения задачи Коши для уравнения Шредингера. Сеточная аппроксимация решений и получение информации о спектре гамильтониана.
3. Алгоритмы Метрополиса, Глаубера и Хастингса для моделирования дискретных распределений. Условие детального баланса. Случай марковских цепей с непрерывным множеством состояний. Моделирование пуассоновских случайных процессов. Алгоритм Хастингса для несимметричных цепей. Применения.

#### 8. Проблема моментов и теорема Бернштейна.

1. Достаточные условия аналитичности характеристических функций. Условие Карлемана. Пример нарушения однозначного соответствия между набором моментов и вероятностных распределением.
2. Полиномы Бернштейна. Теорема о реконструкции вероятностного распределения по моментам. Формула реконструкции распределений.
3. Распределение Вигнера и его связь со спектральными свойствами случайных матриц и числами Каталана.

4. Кривые Пирсона. Классы распределений, точно воспроизводимых по 4-м моментам. Программная реализация метода Пирсона в системе Математика

9. Скачкообразные и диффузионные процессы.

1. Пуассоновский процесс и уравнение Колмогорова--Феллера. Численное моделирование пуассоновского процесса
2. Сходимость случайных блужданий к винеровскому процессу.
3. Представление стандартного винеровского процесса рядом Фурье со случайными коэффициентами. Принцип отражения Андрэ и другие оценки распределения времени первого достижения.
4. Формула Фейнмана--Каца и ее обобщения. Абсолютно непрерывные преобразования вероятностных мер. Формула Гирсанова.

10. Статистическая обработка экспериментальных данных.

1. Обработка экспериментальных данных и задачи математической статистики. Выборочное среднее и выборочная дисперсия. Несмещенные и состоятельные оценки параметров.
2. Критерий Стюдента. Вывод формулы для распределения с  $N$  степенями свободы. Предел при больших  $N$ .
3. Оценка доверительного интервала, статистическая значимость, ошибки первого и второго рода
4. Применение распределения Стюдента для проверки гипотезы о равенстве средних значений.
5. Сравнение выборочных дисперсий с помощью распределения Фишера. Оценка доверительного интервала в системе Математика
6. Гипотеза об однородности многокомпонентной генеральной совокупности. Пример проверки гипотезы об однородности на реальных данных

11. Сходимость случайных величин и предельные теоремы.

1. Неравенство Чебышева. Сходимость по вероятности. Закон больших чисел. Достаточное условие сходимости с вероятностью единица.
2. Сходимость биномиального распределения к пуассоновскому и нормальному. Сходимость по вероятности и по распределению.
3. Доказательство теоремы Муавра--Лапласа. Численные примеры в системе Математика.
4. Предельная теорема для экстремальных событий. Распределения Вейбулла, Гумбеля и Фишера.

12. Теорема Бохнера--Хинчина и центральная предельная теорема.

1. Положительная определенность характеристических функций и лемма Шура. Примеры положительно определенных функций.
2. Теорема Бохнера--Хинчина. Плотность и относительная компактность семейства мер.
3. Плотные и относительно слабо компактные семейства мер. Достаточное условие относительной слабой компактности. Теорема Прохорова. Центральная предельная теорема.
4. ЦПТ в форме Ляпунова и Линдеберга.
5. Безгранично делимые и устойчивые законы и структура их характеристических функций.
6. Модель Хольцмарка. Распределения Леви. Предельные теоремы для распределений с тяжелыми хвостами

## **5. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине (модулю)**

учебная аудитория, оснащенная компьютером и мультимедийным оборудованием (проектор, звуковая система).

## **6.Перечень рекомендуемой литературы**

### Основная литература

1. Лагутин М.Б. Наглядная математическая статистика. --- М.: Бином, 2009. --- 472 с.
2. Косарев Е.Л. Методы обработки экспериментальных данных. --- М.: Физматлит. 2008. --- 208 с.
3. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т.~1 М.: Мир, 1967. --- 498 с. --- Т.~2. ---М.: Мир, 1967. --- 752 с.

### Фонд литературы кафедры

### Дополнительная литература

1. Худсон Д. Статистика для физиков. --- М.: Мир, 1967. --- 242 с.
2. Чеботарев А.М. Теория вероятностей и математическая статистика для физиков. ---М, Физтех-Полиграф, --2009. ---249с.
3. Ширяев А.Н. Вероятность. --- М.: Наука, 1980. --- 575 с.

### Фонд литературы кафедры

## **7. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети "Интернет", необходимых для освоения дисциплины (модуля)**

Презентации лекций и примеры задач, включенных в контрольные работы

<http://statphys.nm.ru/biblioteka/lecturesPS/presentations/presentation1.pdf>

<http://statphys.nm.ru/biblioteka/lecturesPS/presentations/presentation9.pdf>

<http://statphys.nm.ru/biblioteka/lecturesPS/cw1.pdf>

<http://statphys.nm.ru/biblioteka/lecturesPS/cw2.pdf>

Электронные ресурсы, включая доступ к базам данных и . т.д. (желательно 2 источника)

<http://functions.wolfram.com/>

<http://www.wolframscience.com/nksonline/toc.html>

<http://gams.nist.gov/>

## **8. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень необходимого программного обеспечения и информационных справочных систем (при необходимости)**

На лекционных занятиях используются мультимедийные технологии, в том числе демонстрация презентаций.

В процессе самостоятельной работы обучающихся возможно использование программных средств: Mathcad, MATLAB, Maple и др.

## **9. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)**

Для успешного освоения курса, помимо посещения лекций и семинаров, от студентов требуется самостоятельная работа в объеме не менее чем те часы, которые указаны для каждого раздела программы. В основном, это время отводится на самостоятельное решение задач, входящих в две контрольные работы. Самостоятельные занятия включают в себя также повторение материала лекций, семинарских занятий и подготовку к промежуточным тестированиям, которые проводятся для текущего контроля за усвоением материала. Студенты, успешно прошедшие все формы промежуточного контроля, допускаются к сдаче экзамена по дисциплине.

## ПРИЛОЖЕНИЕ

### ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ (МОДУЛЮ)

<b>по направлению:</b>	Прикладные математика и физика
<b>профиль подготовки:</b>	Физика атомных ядер и элементарных частиц, физика высоких энергий Физтех-школа природоподобных, плазменных и ядерных технологий им. И.В. Курчатова кафедра математики и математических методов физики
<b>курс:</b>	<u>4</u>
<b>квалификация:</b>	бакалавр
Семестр, формы промежуточной аттестации: 7 (осенний) - Экзамен	
<b>Разработчик:</b>	А.М. Чеботарев, д-р физ.-мат. наук, профессор, профессор



## 1. Компетенции, формируемые в процессе изучения дисциплины

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
ОПК-1 Способен применять фундаментальные знания, полученные в области физико-математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности	ОПК-1.1 Способен анализировать поставленную задачу, намечать пути ее решения
	ОПК-1.2 Способен строить математические модели, производить количественные расчеты и оценки
	ОПК-1.3 Способен определять границы применимости полученных результатов

## 2. Показатели оценивания компетенций

В результате изучения дисциплины «Теория вероятностей» обучающийся должен:

### знать:

- классическое определение вероятности, понятие вероятностного пространства (аксиоматика Колмогорова), понятие независимых событий; определение условной вероятности; формулу полной вероятности, формулу Байеса, схему независимых испытаний Бернулли; понятия случайной величины;
- функции распределения и плотности распределения; понятия дискретной и абсолютно непрерывной случайных величин; определение среднего значения и дисперсии; определения многомерной случайной величины; независимой случайной величины; коэффициента корреляции; нормальное распределение и распределение Пуассона;
- предельные теоремы Муавра-Лапласа и Пуассона; закон больших чисел; центральную предельную теорему; определения характеристической и производящей функций, их свойства; основные понятия математической статистики, метод максимума правдоподобия, доверительные интервалы; методы проверки статистических гипотез;
- цепи Маркова, их статистический и физический смысл, марковские процессы, конечные однородные цепи Маркова, предельное и стационарное распределения, эргодичность; определение стохастического процесса, задание стохастических процессов с помощью конечномерных распределений, стохастическую эквивалентность.

### уметь:

- применять свойства вероятности;
- вычислять числовые характеристики основных законов распределения;
- находить распределение функций от случайных величин с заданными распределениями;
- находить характеристические и производящие функции;
- выявлять предельное распределение для последовательности случайных величин;
- строить и исследовать модели простых случайных экспериментов;
- вычислять числовые характеристики основных законов распределения;
- применять статистические таблицы.

### владеть:

- аппаратом теории вероятностей; основными одномерными распределениями (равномерное дискретное, Бернулли, биномиальное, отрицательное биномиальное, гипергеометрическое, геометрическое, Пуассона, Парето, равномерное, показательное, нормальное);
- навыками установления взаимосвязей между различными теоретическими понятиями и результатами случайных экспериментов (соотношениями разных видов сходимости); методами точечных и интервальных оценок параметров распределения.

## 3. Перечень типовых (примерных) вопросов, заданий, тем для подготовки к текущему контролю

В целях текущего контроля успеваемости предусмотрен краткий опрос по темам предыдущих занятий по теме прошлой лекции или в конце занятия по пройденной теме.

## 4. Перечень типовых (примерных) вопросов и тем для проведения промежуточной аттестации обучающихся

Промежуточная аттестация по дисциплине «Теория вероятностей» осуществляется в форме экзамена. Экзамен проводится в устной форме.

Перечень контрольных вопросов для сдачи экзамена в 7 семестре:

1. Вероятностное пространство. Несовместные и независимые события. Условная вероятность. Формула Байеса. Случайные величины, их средние значения, дисперсии и моменты высших порядков. Распределение сумм и произведений независимых случайных величин. Примеры для финитных д.с.в. Распределение функции от случайной величины.
2. Характеристические и производящие функции случайных величин. Х.ф. суммы независимых случайных величин. Положительная определенность и равномерная непрерывность. Примеры х.ф. для основных распределений. Моменты и коммулянты, их связь с х.ф.
3. Корреляционные и ковариационные функции. Рекуррентные соотношения. Параметризация многомерных нормальных распределений и их характеристических функций с помощью ковариационных матриц.
4. Неравенство Чебышева. Сходимость по вероятности. Закон больших чисел. Достаточное условие сходимости с вероятностью единица.
5. Сходимость биномиального распределения к пуассоновскому и нормальному. Сходимость по вероятности и по распределению.
6. Доказательство теоремы Муавра-Лапласа.
7. Предельная теорема для экстремальных событий. Распределения Вейбулла, Гумбеля и Фишера.
8. Положительная определенность характеристических функций и лемма Шура. Примеры положительно определенных функций. Теорема Бохнера-Хинчина. Плотность и относительная компактность семейства мер.
9. Плотные и относительно слабо компактные семейства мер. Достаточное условие относительной слабой компактности. Теорема Прохорова. Центральная предельная теорема.
10. Центральная предельная теорема в форме Ляпунова и Линдеберга.
11. Безгранично делимые и устойчивые законы и структура их характеристических функций. Модель Хольцмарка. Распределения Леви. Предельные теоремы для распределений с тяжелыми хвостами
12. Достаточные условия аналитичности характеристических функций. Условие Карлемана. Пример нарушения однозначного соответствия между набором моментов и вероятностным распределением. Полиномы Бернштейна. Теорема о реконструкции вероятностного распределения по моментам. Формула реконструкции распределений.
13. Распределение Вигнера и его связь со спектральными свойствами случайных матриц и числами Каталана. Кривые Пирсона. Классы распределений, точно воспроизводимых по 4-м моментам.
14. Обработка экспериментальных данных и задачи математической статистики. Выборочное среднее и выборочная дисперсия. Несмещенные и состоятельные оценки параметров. Критерий Стьюдента. Вывод формулы для распределения с  $N$  степенями свободы. Предел при больших  $N$ . Оценка доверительного интервала, статистическая значимость, ошибки первого и второго рода. Применение распределения Стьюдента для проверки гипотезы о равенстве средних значений. Сравнение выборочных дисперсий с помощью распределения Фишера. Гипотеза об однородности многокомпонентной генеральной совокупности
15. Метод Пирсона для проверки гипотезы о законе распределения с помощью критерия хи-квадрат. Оценка числа степеней свободы. Применение критерия хи-квадрат для проверки гипотезы об однородности с помощью критерия Пирсона
16. Применение критерия хи-квадрат для проверки гипотезы о независимости с помощью критерия Пирсона. Оценка статистической достоверности закона Хаббла, контроль качества датчиков псевдослучайных чисел и проверка независимости признаков.
17. Алгебраическое и геометрическое содержание метода наименьших квадратов  
Оценка и статистический анализ остаточной суммы квадратов. Коэффициент детерминации Пирсона  
Оценки доверительных интервалов для коэффициентов линейной регрессии с помощью распределений Стьюдента.
- Сеточные ортонормированные полиномы. Метод Форсайта для оценки порядка регрессии с помощью распределений Фишера.
18. Теорема Гливленко-Кантелли. С-критерий Колмогорова для оценки параметров выборочных кумулятивных распределений. Теорема Смирнова. Формулы Крамера-фон Мизеса и Андерсона-Дарлингга. Оценки показателей полиномиально убывающих хвостов. Простые и сложные статистические гипотезы. Понятие мощности статистических критериев.

19. Идентификация параметров методом наибольшего правдоподобия. Информация Фишера и неравенство Рао-Крамера.
20. Марковские цепи. Случайное блуждание и его свойства, закон арксинуса. Классификация состояний цепей Маркова. Неприводимые марковские цепи Теорема Перрона–Фробениуса для неприводимых цепей. Возвратные, невозвратные и апериодические состояния марковских цепей.
21. Пуассоновский процесс и уравнение Колмогорова-Феллера. Сходимость случайных блужданий к винеровскому процессу. Представление стандартного винеровского процесса рядом Фурье со случайными коэффициентами.
22. Принцип отражения Андро и другие оценки распределения времени первого достижения. Формула Фейнмана-Каца и ее обобщения. Абсолютно непрерывные преобразования вероятностных мер. Формула Гирсанова
23. Методы отбора и преобразования случайных величин. Метод фон Неймана. Метод Монте-Карло. Стохастическое представление решения задачи Коши для уравнения Шредингера. Сеточная аппроксимация решений и получение информации о спектре гамильтониана.
24. Алгоритмы Метрополиса, Глаубера и Хастингса для моделирования дискретных распределений. Условие детального баланса. Случай марковских цепей с непрерывным множеством состояний. Моделирование пуассоновских случайных процессов. Алгоритм Хастингса для несимметричных цепей.

Примеры экзаменационных билетов:

Билет 1

1. Вероятностное пространство. Несовместные и независимые события. Условная вероятность. Формула Байеса. Случайные величины, их средние значения, дисперсии и моменты высших порядков. Распределение сумм и произведений независимых случайных величин. Примеры для финитных д.с.в. Распределение функции от случайной величины.
2. Марковские цепи. Случайное блуждание и его свойства, закон арксинуса. Классификация состояний цепей Маркова. Неприводимые марковские цепи Теорема Перрона–Фробениуса для неприводимых цепей. Возвратные, невозвратные и апериодические состояния марковских цепей.

Билет 2

1. Характеристические и производящие функции случайных величин. Х.ф. суммы независимых случайных величин. Положительная определенность и равномерная непрерывность. Примеры х.ф. для основных распределений. Моменты и коммулянты, их связь с х.ф.
2. Пуассоновский процесс и уравнение Колмогорова-Феллера. Сходимость случайных блужданий к винеровскому процессу. Представление стандартного винеровского процесса рядом Фурье со случайными коэффициентами.

Билет 3

1. Корреляционные и ковариационные функции. Рекуррентные соотношения. Параметризация многомерных нормальных распределений и их характеристических функций с помощью ковариационных матриц.
2. Принцип отражения Андро и другие оценки распределения времени первого достижения. Формула Фейнмана-Каца и ее обобщения. Абсолютно непрерывные преобразования вероятностных мер. Формула Гирсанова

Критерии оценивания

отлично

10 Выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины, проявляющему интерес к данной предметной области, продемонстрировавшему умение уверенно и творчески применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений.

9 Выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений.

8 Выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, правильное обоснование принятых решений, с некоторыми недочетами.

хорошо

7 Выставляется студенту, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но недостаточно грамотно обосновывает полученные результаты.

6 Выставляется студенту, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности.

5 Выставляется студенту, если он в основном знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач достаточно большое количество неточностей.

удовлетворительно

4 Выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, недостаточно правильные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, но при этом он освоил основные разделы учебной программы, необходимые для дальнейшего обучения, и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации.

3 Выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, допускающему ошибки в формулировках базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, слабо владеет основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и с трудом применяет полученные знания даже в стандартной ситуации.

неудовлетворительно

2 Выставляется студенту, который не знает большей части основного содержания учебной программы дисциплины, допускает грубые ошибки в формулировках основных принципов и не умеет использовать полученные знания при решении типовых задач.

1 Выставляется студенту, который не знает основного содержания учебной программы дисциплины, допускает грубейшие ошибки в формулировках базовых понятий дисциплины и вообще не имеет навыков решения типовых практических задач.

## **5. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности**

При проведении экзамена обучающемуся предоставляется не менее 40 минут на подготовку. Опрос по билету и ответы на дополнительные вопросы не должны превышать двух астрономических часов. По завершении отведенного на опрос времени, экзаменатор должен выставить обучающемуся экзаменационную оценку.

### **3. Перечень типовых контрольных заданий, используемых для оценки знаний, умений, навыков**

Промежуточная аттестация по дисциплине «Теория вероятностей» осуществляется в форме экзамена. Экзамен проводится в устной форме.

#### **Перечень контрольных вопросов для сдачи экзамена в 7 семестре:**

1. Вероятностное пространство. Несовместные и независимые события. Условная вероятность. Формула Байеса. Случайные величины, их средние значения, дисперсии и моменты высших порядков. Распределение сумм и произведений независимых случайных величин. Примеры для финитных д.с.в. Распределение функции от случайной величины.
2. Характеристические и производящие функции случайных величин. Х.ф. суммы независимых случайных величин. Положительная определенность и равномерная непрерывность. Примеры х.ф. для основных распределений. Моменты и коммулянты, их связь с х.ф.
3. Корреляционные и ковариационные функции. Рекуррентные соотношения. Параметризация многомерных нормальных распределений и их характеристических функций с помощью ковариационных матриц.
4. Неравенство Чебышева. Сходимость по вероятности. Закон больших чисел. Достаточное условие сходимости с вероятностью единица.
5. Сходимость биномиального распределения к пуассоновскому и нормальному. Сходимость по вероятности и по распределению.
6. Доказательство теоремы Муавра-Лапласа.
7. Предельная теорема для экстремальных событий. Распределения Вейбулла, Гумбеля и Фишера.
8. Положительная определенность характеристических функций и лемма Шура. Примеры положительно определенных функций. Теорема Бохнера-Хинчина. Плотность и относительная компактность семейства мер.
9. Плотные и относительно слабо компактные семейства мер. Достаточное условие относительной слабой компактности. Теорема Прохорова. Центральная предельная теорема.
10. Центральная предельная теорема в форме Ляпунова и Линдеберга.
11. Безгранично делимые и устойчивые законы и структура их характеристических функций. Модель Хольцмарка. Распределения Леви. Предельные теоремы для распределений с тяжелыми хвостами
12. Достаточные условия аналитичности характеристических функций. Условие Карлемана. Пример нарушения однозначного соответствия между набором моментов и вероятностным распределением. Полиномы Бернштейна. Теорема о реконструкции вероятностного распределения по моментам. Формула реконструкции распределений.
13. Распределение Вигнера и его связь со спектральными свойствами случайных матриц и числами Каталана. Кривые Пирсона. Классы распределений, точно воспроизводимых по 4-м моментам.
14. 1. Обработка экспериментальных данных и задачи математической статистики. Выборочное среднее и выборочная дисперсия. Несмещенные и состоятельные оценки параметров. Критерий Стьюдента. Вывод формулы для распределения с  $N$  степенями свободы. Предел при больших  $N$ . Оценка доверительного интервала.

15. Статистическая значимость, ошибки первого и второго рода. Применение распределения Стьюдента для проверки гипотезы о равенстве средних значений. Сравнение выборочных дисперсий с помощью распределения Фишера. Гипотеза об однородности многокомпонентной генеральной совокупности
16. Метод Пирсона для проверки гипотезы о законе распределения с помощью критерия хи-квадрат. Оценка числа степеней свободы. Применение критерия хи-квадрат для проверки гипотезы об однородности с помощью критерия Пирсона
17. Применение критерия хи-квадрат для проверки гипотезы о независимости с помощью критерия Пирсона. Оценка статистической достоверности закона Хаббла, контроль качества датчиков псевдослучайных чисел и проверка независимости признаков.
18. Алгебраическое и геометрическое содержание метода наименьших квадратов. Оценка и статистический анализ остаточной суммы квадратов. Коэффициент детерминации Пирсона. Оценки доверительных интервалов для коэффициентов линейной регрессии с помощью распределений Стьюдента. Сеточные ортонормированные полиномы. Метод Форсайта для оценки порядка регрессии с помощью распределений Фишера.
19. Теорема Гливленко-Кантелли. С-критерий Колмогорова для оценки параметров выборочных кумулятивных распределений. Теорема Смирнова. Формулы Крамера-фон Мизеса и Андерсона-Дарлинга. Оценки показателей полиномиально убывающих хвостов. Простые и сложные статистические гипотезы. Понятие мощности статистических критериев.
20. Идентификация параметров методом наибольшего правдоподобия. Информация Фишера и неравенство Рао-Крамера.
21. Марковские цепи. Случайное блуждание и его свойства, закон арксинуса. Классификация состояний цепей Маркова. Неприводимые марковские цепи. Теорема Перрона-Фробениуса для неприводимых цепей. Возвратные, невозвратные и апериодические состояния марковских цепей.
22. Пуассоновский процесс и уравнение Колмогорова-Феллера. Сходимость случайных блужданий к винеровскому процессу. Представление стандартного винеровского процесса рядом Фурье со случайными коэффициентами.
23. Принцип отражения Андрэ и другие оценки распределения времени первого достижения. Формула Фейнмана--Каца и ее обобщения. Абсолютно непрерывные преобразования вероятностных мер. Формула Гирсанова
24. Методы отбора и преобразования случайных величин. Метод фон Неймана. Метод Монте-Карло. Стохастическое представление решения задачи Коши для уравнения Шредингера. Сеточная аппроксимация решений и получение информации о спектре гамильтониана.
25. Алгоритмы Метрополиса, Глаубера и Хастингса для моделирования дискретных распределений. Условие детального баланса. Случай марковских цепей с непрерывным множеством состояний. Моделирование пуассоновских случайных процессов. Алгоритм Хастингса для несимметричных цепей.

### **3.1 Примеры экзаменационных билетов:**

#### **Билет №1**

Вероятностное пространство. Несовместные и независимые события. Условная вероятность. Формула Байеса. Случайные величины, их средние значения, дисперсии и

моменты высших порядков. Распределение сумм и произведений независимых случайных величин. Примеры для финитных д.с.в. Распределение функции от случайной величины.

### Билет №2

Достаточные условия аналитичности характеристических функций. Условие Карлемана. Пример нарушения однозначного соответствия между набором моментов и вероятностных распределением. Полиномы Бернштейна. Теорема о реконструкции вероятностного распределения по моментам. Формула реконструкции распределений.

### Билет №3

Алгебраическое и геометрическое содержание метода наименьших квадратов  
Оценка и статистический анализ остаточной суммы квадратов. Коэффициент детерминации Пирсона  
Оценки доверительных интервалов для коэффициентов линейной регрессии с помощью распределений Стьюдента. Сеточные ортонормированные полиномы. Метод Форсайта для оценки порядка регрессии с помощью распределений Фишера.

## 4. Критерии оценивания

Оценка	Баллы	Критерии
отлично	10	Выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины, проявляющему интерес к данной предметной области, продемонстрировавшему умение уверенно и творчески применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений.
	9	Выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений.
	8	Выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, правильное обоснование принятых решений, с некоторыми недочетами.
хорошо	7	Выставляется студенту, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но недостаточно грамотно обосновывает полученные результаты.
	6	Выставляется студенту, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности.

	5	Выставляется студенту, если он в основном знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач достаточно большое количество неточностей.
удовлетворительно	4	Выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, недостаточно правильные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, но при этом он освоил основные разделы учебной программы, необходимые для дальнейшего обучения, и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации.
	3	Выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, допускающему ошибки в формулировках базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, слабо владеет основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и с трудом применяет полученные знания даже в стандартной ситуации.
неудовлетворительно	2	Выставляется студенту, который не знает большей части основного содержания учебной программы дисциплины, допускает грубые ошибки в формулировках основных принципов и не умеет использовать полученные знания при решении типовых задач.
	1	Выставляется студенту, который не знает основного содержания учебной программы дисциплины, допускает грубейшие ошибки в формулировках базовых понятий дисциплины и вообще не имеет навыков решения типовых практических задач.

### **5. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности**

При проведении экзамена обучающемуся предоставляется не менее 40 минут на подготовку. Опрос по билету и ответы на дополнительные вопросы не должны превышать двух астрономических часов. По завершении отведенного на опрос времени, экзаменатор должен выставить обучающемуся экзаменационную оценку.